长度为奇素数的完备高斯整数序列构造法

李玉博[1,2]，陈邈[1,2]，刘涛[1,2]，张颖[1,2]
（1. 燕山大学信息科学与工程学院，河北 秦皇岛 066004；
2. 河北省信息传输与信号处理重点实验室，河北 秦皇岛 066004）

摘　要：提出一类基于分圆类构造完备高斯整数序列的方法。分别通过有限域 $GF(p)$上的 2 阶和 4 阶分圆类，构造得到自由度分别为 3 和 5 的高斯整数序列，序列长度为奇素数，该序列具有良好的完备自相关性能。该构造方法解决了以往利用分圆类计算复杂度较高，不易求解的问题，简化了序列的生成方法。该序列在无线通信中具有良好的应用前景。

关键词：完备高斯整数序列；伪随机序列；分圆类；离散傅里叶变换
中图分类号：TN911.2
文献标识码：A
doi: 10.11959/j.issn.1000−436x.2018230

Constructions of perfect Gaussian integer sequences of odd prime length

LI Yubo[1,2], CHEN Miao[1,2], LIU Tao[1,2], ZHANG Ying[1,2]
1. School of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China
2. The Key Laboratory of Information Transmission and Signal Processing of Hebei Province, Qinhuangdao 066004, China

Abstract: Constructions of perfect Gaussian integer sequences (PGIS) based on the cyclotomic classes were proposed. The PGIS with degree 3 and 5 were constructed respectively from the cyclotomic classes of order 2 and 4. The presented sequences with odd prime length have ideal autocorrelations. The methods solved the problem that the traditional constructions of PGIS from the cyclotomic classes have high computational complexity. As a result, this kind of sequences will be useful in the applications of wireless communications.

Key words: perfect Gaussian integer sequence, pseudo-random sequence, cyclotomic classes, discrete Fourier transform

1 引言

具备理想自相关性能的序列被称为完备序列[1-2]。该类序列广泛应用于无线通信[3]、信道估计[4]、雷达探测等领域。通常完备的二元和四元序列因其较高的能量效率和应用便利的特点得到广泛应用。但是这两类序列的已知数量极少，如只存在一个长度为 4 的二元完备序列；对于四元序列，不存在长度为 2^m，$m>4$的完备序列[5]。因此具有完备自相关性能的多元复数序列被广泛研究。

高斯整数序列是序列中各元素的实部和虚部均为整数的序列。高斯整数序列与传统的单位圆复数根序列不同，其元素幅值不相等。由于高斯整数序列的这种性质，可将其应用到 CDMA 通信系统中用于提高数据传输速率。近年来，具有良好自相关性能的高斯整数序列设计得到学者的广泛关注。Fan 和 Darnell[6]根据有限域 $GF(p)$和高斯素数域 G_π 在数学上相等价的特性，提出了一类长度为 N 的几乎完备高斯整数序列的构造方法，该序列在 $\frac{N}{4}$、$\frac{N}{2}$

收稿日期：2017−10−24；修回日期：2018−09−26
通信作者：李玉博，liyubo6316@ysu.edu.cn
基金项目：国家自然科学基金资助项目（No.61501395）
Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (No.61501395)

和 $\frac{3N}{4}$ 处存在 3 个非零旁瓣值。Pei[7]通过将时域序列转换到频域，利用补零和复制序列的方法得到任意长度的完备高斯整数序列。Chang 等[8]利用过采样技术和基序列理论构造出了自由度分别为 3 和 4 的任意复合长度的完备高斯整数序列。Peng 等[9]采用参数为 $\left(N,\frac{N-1}{2},\frac{N-3}{4}\right)$ 的循环差集和中国剩余定理相结合的构造方法，得到了自由度为 4，序列长度为 $N\equiv 2(\bmod 4)$ 的完备高斯整数序列。文献[10]利用定义在集合 $\{0,\pm 1,\pm \mathrm{j}\}$ 的 4 个基序列，进行线性组合，构造了一类特殊的高斯整数序列。这类序列中零元素占绝大多数，最多只有 16 个非零元素，称这类序列为稀疏高斯整数序列，可被用于 OFDM 系统降低信号峰均功率比。文献[11-13]提出利用二元伪随机序列构造自由度为 2 的完备高斯整数序列。文献[14]在此基础上将该方法进行推广，提出采用 p 元伪随机序列产生几乎完备高斯整序列的构造方法。文献[15]提出将完备高斯整数序列设计问题转换为线性方程组求解的问题，得到了序列周期为 p^k，其中，p 为素数，自由度为 $k+1$ 的完备高斯整数序列。Tang 等[16]利用组合数学中的经典分圆类方法在有限域 $GF(p)$ 上利用 2 阶和 4 阶分圆类构造出长度为奇素数，自由度分别为 3 和 5 的完备高斯整数序列。该方法通过分圆和映射将高斯整数序列设计问题转化为非线性方程组的求解问题。这种方法必然导致随着自由度的增加，非线性方程组中未知量的数目也随着增加，求解难度也相应增大。在文献[16]中提出了自由度为 5 的完备高斯整数序列构造方法，并列举了满足条件的方程组，然而并未对其进行求解。

为避免分圆类构造高斯整数序列时方程组不易求解的问题，本文根据完备序列的离散傅里叶变换均为恒模序列的性质，在频域上进行构造，得到完备高斯整数序列。首先利用分圆类在时域上得到几乎完备序列，将其转换到频域得到谱序列，然后通过在零点处进行补值的方式，使其成为恒模序列，并经离散傅里叶逆变换得到完备高斯整数序列。该方法与文献[16]中的构造方法相比，简化了构造高斯整数序列所需满足的条件，避免了非线性方程组的求解问题，使构造方法更加简便。但采用本文的构造方法所构造出的完备高斯整数序列的长度有限制，只能构造出序列长度为奇素数的完备高斯整数序列。

2　基本概念

定义 1　设 $S=\left(s(0),s(1),\cdots,s(N-1)\right)$ 是长度为 N 的序列，序列 S 中的元素 $s(t)$ 均为复数形式，表示为 $s(t)=a(t)+\mathrm{j}b(t)$，其中，$a(t),b(t)\in \mathrm{Z}$，$0\leqslant t\leqslant N-1$，j 是虚数单位，则序列 S 为高斯整数序列。若在序列 S 的一个周期内，存在不同非零元素的个数为 d，则称序列的自由度为 d。序列 S 的自相关函数定义为

$$R_S(\tau)=\sum_{t=0}^{N-1}s(t)s(t+\tau)^* \tag{1}$$

其中，$t+\tau=(t+\tau)\bmod N$，$0\leqslant\tau<N$，$s(t)^*$ 表示复数 $s(t)$ 的复共轭。若序列 S 为完备高斯整数序列，则其理想自相关函数一定满足

$$R_s(\tau)=\begin{cases}E_S, & \tau=0\\ 0, & \tau=1,2,\cdots,N-1\end{cases} \tag{2}$$

其中，$E_S=\sum_{t=0}^{N-1}\left|s(t)\right|^2$ 表示序列 S 的能量。

定义 2　设 $p=ef+1$ 是一个素数，e 和 f 均为正整数，α 是有限域 $GF(p)$ 上的一个本原元，则 $C_l^{(e)}=\alpha^l C_0^{(e)}=\{\alpha^{ek+j},0\leqslant l<e,0\leqslant k<f\}$。其中，$C_l^{(e)}$ 被称为有限域 $GF(p)$ 上的 e 阶分圆类[17]，而对于正整数 l 和 k，定义 $(l,k)_e$ 为有限域 $GF(p)$ 上的 e 阶分圆数，其表达式为

$$(l,k)_e=\left|\left(C_l^{(e)}+1\right)\cap C_k^{(e)}\right| \tag{3}$$

引理 1[17]　设 $p=2f+1$，p 为奇素数。若 f 为奇数，则其 2 阶分圆数为

$$(0,0)_2=(1,0)_2=(1,1)_2=\frac{f-1}{2},(0,1)_2=\frac{f+1}{2} \tag{4}$$

若 f 为偶数，其 2 阶分圆数为

$$(0,1)_2=(1,0)_2=(1,1)_2=\frac{f}{2},(0,1)_2=\frac{f-2}{2} \tag{5}$$

引理 2[17]　设 $p=4f+1=4x^2+y^2$，x 和 y 均为正整数。当 f 为奇数时，这 16 个分圆数如表 1 所示，其中，$A=\frac{p-7+2x}{16}$，$B=\frac{p+1+2x+8y}{16}$，$C=\frac{p+1-6x}{16}$，$D=\frac{p+1+2x+8y}{16}$，$E=\frac{p-3-2x}{16}$。

当 f 为偶数时，这 16 个分圆数如表 2 所示，其中，$A=\frac{p-11-6x}{16}$，$B=\frac{p-3+2x+8y}{16}$，$C=\frac{p-3+2x}{16}$，$D=\frac{p-3+2x-8y}{16}$，$E=\frac{p+1-2x}{16}$。

表 1 f 为奇数时的 4 阶分圆数

$(j,k)_4$	0	1	2	3
0	A	B	C	D
1	E	E	D	B
2	A	E	A	E
3	E	D	B	E

表 2 f 为偶数时的 4 阶分圆数

$(j,k)_4$	0	1	2	3
0	A	B	C	D
1	B	D	E	E
2	C	E	C	E
3	D	E	E	B

引理 3[18] 设 $p=4f+1$ 为素数，则满足式(6)。

$$\sum_{m=0}^{3}(m,m+n)=\begin{cases}f-1, & n=0\\ f, & n=1,2,3\end{cases} \tag{6}$$

通过上述分圆类可以构造几乎完备序列，且这类几乎完备序列经过离散傅里叶变换之后的谱序列具有除零时刻外，其余时刻的模值均相等的性质。通过在零时刻进行补值，使其满足恒模条件，对构造后的谱序列进行离散傅里叶逆变换可以得到完备序列。

定义 3 对长度为 N 的时域序列 $s(n)$ 进行离散傅里叶变换（DFT）,得到频域序列 $\hat{s}(m)$，简称为谱序列。序列 $s(n)$ 的 DFT 表达式如式(7)所示。

$$\hat{s}(m)=\sum_{n=0}^{N-1}s(n)\omega^{nm} \tag{7}$$

其中，$\omega=\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}2\pi}{N}}$，$n,m\in \mathrm{Z}_N$。离散傅里叶逆变换（IDFT）表达式为

$$s(n)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\hat{s}(m)\omega^{-nm} \tag{8}$$

定义 4 设序列 $s(n)$ 为长度为 N 的恒模序列，则该序列一定满足下列条件

$$\left|s(n)\right|=A,n\in \mathrm{Z}_N \tag{9}$$

其中，A 为模值。

引理 4[19] 若序列 $s(n)$ 为恒模序列，则其经 DFT 之后的谱序列序列 $\hat{s}(m)$ 必定为完备序列；同理若序列 $s(n)$ 为完备序列，则其经 DFT 之后的谱序列 $\hat{s}(m)$ 必定为恒模序列。

3 完备高斯整数序列构造

本节介绍了两种构造方法，分别利用 2 阶分圆类和 4 阶分圆类构造自由度为 3 和 5，序列长度为奇素数的完备高斯整数序列。首先通过经典分圆类的方法构造出几乎完备序列，然后利用 DFT 得到其谱序列，最后将该序列构造为恒模序列，并将序列进行 IDFT，得到时域序列。由引理 4 可知，所得时域序列即为完备高斯整数序列。

构造法 1

步骤 1 设 $p=2f+1$，p 为奇素数，f 为偶数，得到有限域 $GF(p)$ 上的 2 阶分圆类 $C_l^{(2)}=\left\{C_0^2,C_1^2\right\}$，简记为 $\left\{C_0,\mathrm{C}_1\right\}$。定义序列 $s(t)$，序列长度为 $N=p$，定义如式(10)所示。

$$s(t)=\begin{cases}0, & t=0\\ (-1)^n, & t\in C_n,\ n=0,1\end{cases} \tag{10}$$

步骤 2 对序列 $s(t)$ 进行 DFT 得到谱序列 $\hat{s}(m)$。

步骤 3 构造序列 $\hat{u}(m)$，如式(11)所示。

$$\hat{u}(m)=\begin{cases}N(a+b\mathrm{j}), & m=0\\ N\hat{s}(m), & m\neq 0\end{cases} \tag{11}$$

其中，a 和 b 均为整数，且满足 $a^2+b^2=N$。

步骤 4 将序列 $\hat{u}(m)$ 进行 IDFT 得到序列 $u(t)$。

首先给出引理 5，引理 5 将用于证明序列 $u(t)$ 的完备自相关性质。

引理 5 上述构造法 1 中步骤 2 得到 $s(t)$ 进行 DFT 得到谱序列 $\hat{s}(m)$ 满足

$$\hat{s}(m)=\begin{cases}0, & m=0\\ \sqrt{N}, & m\neq 0\end{cases} \tag{12}$$

证明 分 m=0 和 $m\neq 0$ 两种情况讨论。

1) 当 $m=0$ 时，显然 $\hat{s}(0)=\sum_{t=0}^{N-1}s(t)\omega^0=0$ 成立。

2) 当 $m \neq 0$ 时，$\hat{s}(m)=\sum_{t=0}^{N-1} s(t)\omega^{t\cdot m}=\sum_{t\in C_0}\omega^{tm}+(-1)\sum_{t\in C_1}\omega^{tm}$，设任取 $t_1,t_2\in GF(p)$ 且满足 $t_2=t_1+\tau$。

$$
\begin{aligned}
\left|\hat{s}(m)\right|^2 &= \hat{s}(m)^*\hat{s}(m)\\
&=\left[\sum_{t_1\in C_0}\omega^{-t_1 m}-\sum_{t_1\in C_1}\omega^{-t_1 m}\right]\left[\sum_{t_2\in C_0}\omega^{t_2 m}-\sum_{t_2\in C_1}\omega^{t_2 m}\right]\\
&=\sum_{t_1\in C_0}\sum_{t_2\in C_0}\omega^{(t_2-t_1)m}-\sum_{t_1\in C_0}\sum_{t_2\in C_1}\omega^{(t_2-t_1)m}-\sum_{t_1\in C_1}\sum_{t_2\in C_0}\omega^{(t_2-t_1)m}+\sum_{t_1\in C_1}\sum_{t_2\in C_1}\omega^{(t_2-t_1)m}\\
&=\sum_{\substack{t_1,t_2\in C_0\\ t_1=t_2}}\omega^0+\sum_{\substack{t_1,t_2\in C_0\\ t_1\neq t_2}}\omega^{(t_2-t_1)m}-\left[\sum_{\substack{t_1\in C_0\\ t_2\in C_1}}\omega^{(t_2-t_1)m}+\sum_{\substack{t_1\in C_1\\ t_2\in C_2}}\omega^{(t_2-t_1)m}\right]+\sum_{\substack{t_1,t_2\in C_1\\ t_1=t_2}}\omega^0+\sum_{\substack{t_1,t_2\in C_1\\ t_1\neq t_2}}\omega^{(t_2-t_1)m}\\
&=N-1+\left[\sum_{\substack{t_1,t_2\in C_0\\ t_1\neq t_2}}\omega^{(t_2-t_1)m}+\sum_{\substack{t_1,t_2\in C_1\\ t_1\neq t_2}}\omega^{(t_2-t_1)m}\right]-\left[\sum_{\substack{t_1\in C_0\\ t_2\in C_1}}\omega^{(t_2-t_1)m}+\sum_{\substack{t_1\in C_1\\ t_2\in C_2}}\omega^{(t_2-t_1)m}\right]\\
&=N-1+\left[(0,0)_2\sum_{\tau=1}^{N-1}\omega^{\tau m}+(1,1)_2\sum_{\tau=1}^{N-1}\omega^{\tau m}\right]-\left[(0,1)_2\sum_{\tau=1}^{N-1}\omega^{\tau m}+(1,0)_2\sum_{\tau=1}^{N-1}\omega^{\tau m}\right]\\
&=N-1+(f-1)\sum_{\tau=1}^{N-1}\omega^{\tau m}-f\sum_{\tau=1}^{N-1}\omega^{\tau m}\\
&=N
\end{aligned}
\tag{13}
$$

由上述讨论可知，引理 5 成立。

定理 1 由构造法 1 得到的序列 $u(t)$ 是自由度为 3，长度为 $N=2f+1$，f 为偶数，N 为奇素数的完备高斯整数序列。该序列时域表达式如式(14)所示。

$$u(t)=Ns(t)+a+b\mathrm{j} \tag{14}$$

证明 由引理 4 可知若，序列 $u(t)$ 经 DFT 之后得谱序列 $\hat{u}(m)$ 为恒模序列，则序列 $u(t)$ 必定为完备序列。因此只需证明谱序列 $\hat{u}(m)$ 为恒模序列即可。

由 $\hat{u}(m)=\sum_{t=0}^{N-1}u(t)\omega^{tm}=N\sum_{t=0}^{N-1}s(t)\omega^{tm}+(a+b\mathrm{j})\sum_{t=0}^{N-1}\omega^{tm}$

可知，需分 $m=0$ 和 $m\neq 0$ 两种情况进行讨论分析。

1) 当 $m=0$ 时，根据引理 5，由 $\hat{s}(0)=0$，则 $\hat{u}(0)=N(a+b\mathrm{j})$，$\left|\hat{u}(0)\right|=N\sqrt{N}$。

2) 当 $m\neq 0$ 时，由 $(a+b\mathrm{j})\sum_{t=0}^{N-1}\omega^{tm}=0$，则 $\hat{u}(m)=N\sum_{t=0}^{N-1}s(t)\omega^{tm}=N\hat{s}(m)$，根据引理 5 可得 $\left|\hat{u}(m)\right|^2=N^2\left|\hat{s}(m)\right|^2=N^3$。

综上所述，$\left|\hat{u}(m)\right|=N\sqrt{N}, m=0,1,\cdots,N-1$，则谱序列 $\hat{u}(m)$ 为恒模序列，由引理 4 可知，所得构造序列 $u(t)$ 为完备高斯整数序列。

证毕

定理 1 通过 2 阶分圆类产生的几乎完备序列转换到频域，并采用零点补值的方法使其成为恒模序列，根据再经 IDFT 转换到时域，由引理 4 得到自由度为 3 的完备高整数序列。

例 1 $p=2f+1$，令 $f=6$，则得到长度为 $N=13$ 的序列 $s(t)$ 如下所示。

$$s(t)=(0,-1,1,-1,-1,1,1,1,1,-1,-1,1,-1)$$

通过构造法 1，选取 $a=2,b=3$，得到完备高斯整数序列 $u(t)=13s(t)+2+3\mathrm{j}$ 如下所示。

$$
u(t)=\begin{pmatrix}
2+3\mathrm{j},-11+3\mathrm{j},15+3\mathrm{j},-11+3\mathrm{j},-11+3\mathrm{j},15+3\mathrm{j},\\
15+3\mathrm{j},15+3\mathrm{j},15+3\mathrm{j},-11+3\mathrm{j},-11+3\mathrm{j},15+3\mathrm{j},-11+3\mathrm{j}
\end{pmatrix}
$$

自相关值分布如下。

$$R_u(\tau)=(2\,197,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)$$

构造法 1 提出了利用 2 阶分圆类产生自由度为 3 的完备高斯整数序列的方法，通过对所得构造序列 $u(t)$ 观察可知，序列中的不同元素在非零时刻出现的次数相等，说明该序列具有较好的平衡性。

构造法 2

步骤 1 令 $p=4f+1$，p 为素数，得到其 4 阶分圆数 $C_j^{(4)}=\{C_0^4,C_1^4,C_2^4,C_3^4\}$，将其简记为 $\{C_0,C_1,C_2,C_3\}$。定义几乎四元完备序列 $s(t)$ 如式(15)所示。

$$s(t)=\begin{cases}0, & t=0\\ 1, & t\in C_0\\ \mathrm{j}, & t\in C_1\\ -1 & t\in C_2\\ -\mathrm{j}, & t\in C_3\end{cases} \tag{15}$$

步骤 2 对序列 $s(t)$ 进行 DFT 得到谱序列 $\hat{s}(m)$。

步骤 3 根据引理 4 构造序列 $\hat{u}(m)$ 如式(16)所示。

$$\hat{u}(m)=\begin{cases}N\left(a+b_{\mathrm{j}}\right) & , \ m=0\\ N\hat{s}(m) & , \ m\neq 0\end{cases} \tag{16}$$

其中，a 和 b 均为整数，且满足 $a^2+b^2=N$。

步骤 4 将序列 $\hat{u}(m)$ 进行 IDFT，得到序列 $u(t)$。

下面给出引理 6，该引理将用于证明序列 $u(t)$ 的完备自相关性质。

引理 6 上述构造法 2 中步骤 2 得到 $s(t)$ 进行 DFT 得到谱序列 $\hat{s}(m)$ 满足

$$\hat{s}(m)=\begin{cases}0, & m=0\\ \sqrt{N}, & m\neq 0\end{cases} \tag{17}$$

证明 分以下两种情况讨论。

当 $m=0$ 时，显然 $\hat{s}(0)=\sum_{t=0}^{N-1}s(t)\omega^0=0$ 成立。

当 $m\neq 0$ 时，任取 $t_1,t_2\in GF(p)$，则有

$$\begin{aligned}\left|\hat{s}(m)\right|^2&=\hat{s}(m)\hat{s}(m)^*\\
&=\left[\sum_{t_1\in C_0}\omega^{t_1m}+\mathrm{j}\sum_{t_1\in C_1}\omega^{t_1m}-\sum_{t_1\in C_2}\omega^{t_1m}-\mathrm{j}\sum_{t_1\in C_3}\omega^{t_1m}\right]\left[\sum_{t_2\in C_0}\omega^{t_2m}+\mathrm{j}\sum_{t_2\in C_1}\omega^{t_2m}-\sum_{t_2\in C_2}\omega^{t_2m}-\mathrm{j}\sum_{t_2\in C_3}\omega^{t_2m}\right]\\
&=\left[\sum_{t_1\in C_0}\sum_{t_2\in C_0}\omega^{(t_1-t_2)m}+\sum_{t_1\in C_1}\sum_{t_2\in C_1}\omega^{(t_1-t_2)m}+\sum_{t_1\in C_2}\sum_{t_2\in C_2}\omega^{(t_1-t_2)m}+\sum_{t_1\in C_3}\sum_{t_2\in C_3}\omega^{(t_1-t_2)m}\right]-\\
&\quad\mathrm{j}\left[\sum_{t_1\in C_0}\sum_{t_2\in C_1}\omega^{(t_1-t_2)m}+\sum_{t_1\in C_1}\sum_{t_2\in C_2}\omega^{(t_1-t_2)m}+\sum_{t_1\in C_2}\sum_{t_2\in C_3}\omega^{(t_1-t_2)m}+\sum_{t_1\in C_3}\sum_{t_2\in C_0}\omega^{(t_1-t_2)m}\right]-\\
&\quad\left[\sum_{t_1\in C_0}\sum_{t_2\in C_2}\omega^{(t_1-t_2)m}+\sum_{t_1\in C_1}\sum_{t_2\in C_3}\omega^{(t_1-t_2)m}+\sum_{t_1\in C_2}\sum_{t_2\in C_0}\omega^{(t_1-t_2)m}+\sum_{t_1\in C_3}\sum_{t_2\in C_1}\omega^{(t_1-t_2)m}\right]+\\
&\quad\mathrm{j}\left[\sum_{t_1\in C_0}\sum_{t_2\in C_3}\omega^{(t_1-t_2)m}+\sum_{t_1\in C_1}\sum_{t_2\in C_0}\omega^{(t_1-t_2)m}+\sum_{t_1\in C_2}\sum_{t_2\in C_1}\omega^{(t_1-t_2)m}+\sum_{t_1\in C_3}\sum_{t_2\in C_2}\omega^{(t_1-t_2)m}\right]\\
&=A-\mathrm{j}B-C+\mathrm{j}D\end{aligned} \tag{18}$$

将式(18)中的 A 进行化简得

$$\begin{aligned}A&=\sum_{t_1\in C_0}\sum_{t_2\in C_0}\omega^{(t_1-t_2)m}+\sum_{t_1\in C_1}\sum_{t_2\in C_1}\omega^{(t_1-t_2)m}+\sum_{t_1\in C_2}\sum_{t_2\in C_2}\omega^{(t_1-t_2)m}+\sum_{t_1\in C_3}\sum_{t_2\in C_3}\omega^{(t_1-t_2)m}\\
&=\left[\sum_{t_1=t_2\ \ t_1,t_2\in C_0}\omega^0+\sum_{t_1=t_2\ \ t_1,t_2\in C_1}\omega^0+\sum_{t_1=t_2\ \ t_1,t_2\in C_2}\omega^0+\sum_{t_1=t_2\ \ t_1,t_2\in C_3}\omega^0\right]+\\
&\quad\left[\sum_{t_1\neq t_2\ \ t_1,t_2\in C_0}\omega^{(t_1-t_2)m}+\sum_{t_1\neq t_2\ \ t_1,t_2\in C_1}\omega^{(t_1-t_2)m}+\sum_{t_1\neq t_2\ \ t_1,t_2\in C_2}\omega^{(t_1-t_2)m}+\sum_{t_1\neq t_2\ \ t_1,t_2\in C_3}\omega^{(t_1-t_2)m}\right]\end{aligned} \tag{19}$$

令 $t_1=t_2+\tau$，则式(19)为

$$
\begin{aligned}
A &= N-1+(0,0)_4\sum_{\tau=1}^{N-1}\omega^{\tau m}+(1,1)_4\sum_{\tau=1}^{N-1}\omega^{\tau m}+ \\
&\quad (2,2)_4\sum_{\tau=1}^{N-1}\omega^{\tau m}+(3,3)_4\sum_{\tau=1}^{N-1}\omega^{\tau m} \\
&= N-1+\sum_{k=0}^{3}(k,k)_4\sum_{\tau=1}^{N-1}\omega^{\tau m} \\
&= N-1+(f-1)\left[\sum_{\tau=0}^{N-1}\omega^{\tau m}-1\right] \\
&= N-f
\end{aligned} \tag{20}
$$

同理可以求出 B 为

$$
\begin{aligned}
B &= \sum_{t_1\in C_0}\sum_{t_2\in C_1}\omega^{(t_1-t_2)m}+\sum_{t_1\in C_1}\sum_{t_2\in C_2}\omega^{(t_1-t_2)m}+ \\
&\quad \sum_{t_1\in C_2}\sum_{t_2\in C_3}\omega^{(t_1-t_2)m}+\sum_{t_1\in C_3}\sum_{t_2\in C_0}\omega^{(t_1-t_2)m} \\
&= \sum_{t_1\in C_0,t_2\in C_1}\omega^{\tau m}+\sum_{t_1\in C_1,t_2\in C_2}\omega^{\tau m}+ \\
&\quad \sum_{t_1\in C_2,t_2\in C_3}\omega^{\tau m}+\sum_{t_1\in D_3,t_2\in C_0}\omega^{\tau m} \\
&= f\left[\sum_{\tau=0}^{N-1}\omega^{\tau m}-1\right] \\
&= -f
\end{aligned} \tag{21}
$$

按照相同的计算方法可以求出 $C=-f$ 和 $D=-f$ 。

综上，所述当 $m\neq 0$ 时，$\left|\hat{s}(m)\right|^2=N-f-\mathrm{j}(-f)-(-f)+\mathrm{j}(-f)=N$ ，引理成立。

定理 2　序列 $u(t)$ 是自由度为 5 的，序列长度为 $N=4f+1$ 的完备高斯整数序列，其时域定义如式(22)所示。

$$u(t)=Ns(t)+a+b\mathrm{j} \tag{22}$$

证明　对所得构造序列 $u(t)$ 进行 DFT 得到谱序列 $\hat{u}(m)$，根据引理 4 分别对 $m=0$ 和 $m\neq 0$ 两种情况分别进行讨论。

1) 当 $m=0$ 时，根据引理 6，显然 $\left|\hat{u}(0)\right|=N\sqrt{N}$ 成立。

2) 当 $m\neq 0$ 时，则根据引理 6 可得 $\hat{u}(m)=N\sum_{t=0}^{N-1}s(t)\omega^{tm}=N\hat{s}(m)=N\sqrt{N}$ 。

综上可得

$$
\left|\hat{u}(m)\right|=\begin{cases}N\sqrt{N}, & m=0\\ N\sqrt{N}, & m\neq 0\end{cases} \tag{23}
$$

序列 $\hat{u}(m)$ 为恒模序列，由引理 4 可知序列 $u(t)$ 为完备高斯整数序列。证毕

例 2　$p=4f+1$ ，令 $f=4$ ，则得到长度为 $N=17$ 的序列 $s(t)$ 如下所示。

$$s(t)=(0,1,-1,\mathrm{j},1,\mathrm{j},-\mathrm{j},-\mathrm{j},-1,-1,-\mathrm{j},-\mathrm{j},\mathrm{j},1,\mathrm{j},-1,1)$$

利用构造法 2，选取 $a=1,b=4$ ，则可以得到完备高斯整数序列 $u(t)=17s(t)+1+4\mathrm{j}$ 高斯整数序列 $u(t)$ 如下

$$
\begin{aligned}
u(t)=(&1+4\mathrm{j},18+4\mathrm{j},-16+4\mathrm{j},1+21\mathrm{j},18+4\mathrm{j},\\
&1+21\mathrm{j},1-13\mathrm{j},1-13\mathrm{j},-16+4\mathrm{j},-16+4\mathrm{j},1-13\mathrm{j},\\
&1-13\mathrm{j},1+21\mathrm{j},18+4\mathrm{j},1+21\mathrm{j},-16+4\mathrm{j},18+4\mathrm{j})
\end{aligned}
$$

自相关函数值分布如下所示。

$$R_u(\tau)=(4\,913,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)$$

通过对构造出的高斯整数序列 $u(t)$ 计算其自相关函数可知，只在 τ=0 时 $R_u(\tau)=17^3=4\,913$ ，在其余时刻旁边值均为零，则所构造序列为完备高斯整数序列。序列 $u(t)$ 在零时刻的元素只出现一次，而在其余时刻不同元素出现次数相同，这表明该序列具有良好的平衡性。

4　分析与对比

通过对上述构造方法所得结果进行总结，可以得到如表 3 所示结果，表 3 中列举了一些自由度分别为 3 和 5、长度不同的完备高斯整数序列所需满足的 a 和 b 的值。

通过对表 3 中结果分析可知，利用 4 阶分圆类构造自由度为 5 的完备高斯整数序列可知，只要其满足分圆类条件，即 p 为素数，f 为正整数，所得序列 $s(t)$ 均可以构造得到完备高斯整数序列 $u(t)$ 。而对于 2 阶分圆类所得构造序列，在满足分圆类的条件下，对 f 需要进行进一步限定，即 f 必须为偶数。因为当 f 为奇数时，由 $p=2f+1$ 所得序列长度 N 不满足条件 $N\equiv 1\bmod 4$ ，则无法分解成两个自然数的平方相加的形式，因此无法构造出完备高斯整数序列。综上所述，利用 2 阶和 4 阶分圆类均能构造长度为 $N=4f+1$（f 为正整数），自由度分别为 3 和 5 的完备高斯整数序列。

该方法与文献[16]的方法相比明显简化了序列的生成方法。在文献[16]中分别给出了利用 2 阶和 4 阶分圆类构造完备高斯整数序列的方法及其满足

表 3　不同长度完备高斯整数序列

自由度为 3 的完备高斯整数序列			自由度为 5 阶完备高斯整数序列		
f	$p=2f+1$	(a,b)	f	$p=4f+1$	(a,b)
2	5	$(\pm1,\pm2)(\pm2,\pm1)$	1	5	$(\pm1,\pm2)(\pm2,\pm1)$
3	7	不存在	3	13	$(\pm3,\pm2)(\pm2,\pm3)$
5	11	不存在	4	17	$(\pm1,\pm4)(\pm4,\pm1)$
6	13	$(\pm3,\pm2)(\pm2,\pm3)$	7	29	$(\pm2,\pm5)(\pm5,\pm2)$
8	17	$(\pm1,\pm4)(\pm4,\pm1)$	9	37	$(\pm1,\pm6)(\pm6,\pm1)$
9	19	不存在	10	41	$(\pm4,\pm5)(\pm5,\pm4)$
11	23	不存在	13	53	$(\pm2,\pm7)(\pm7,\pm2)$
14	29	$(\pm2,\pm5)(\pm5,\pm2)$	15	61	$(\pm6,\pm5)(\pm5,\pm6)$
15	31	不存在	18	73	$(\pm8,\pm3)(\pm3,\pm8)$
18	37	$(\pm1,\pm6)(\pm6,\pm1)$	22	89	$(\pm8,\pm5)(\pm5,\pm8)$
20	41	$(\pm4,\pm5)(\pm5,\pm4)$	24	97	$(\pm4,\pm9)(\pm9,\pm4)$
21	43	不存在	25	101	$(\pm1,\pm10)(\pm10,\pm1)$
23	47	不存在	27	109	$(\pm3,\pm10)(\pm10,\pm3)$

条件，但是在文中利用 4 阶分圆类构造完备高斯整数序列时只给出了所需满足的方程组，而没有进行求解。当 f 为奇数时，4 阶分圆类构造高斯整数序列所需满足的条件如式(24)所示，当 f 为偶数时，4 阶分圆类构造高斯整数序列所需满足的条件如式(25)所示。

$$\begin{cases} a_0a_0^*A+a_0a_1^*E+a_0a_2^*A+a_0a_3^*E+a_1a_0^*B+a_1a_1^*E+a_1a_2^*E+a_1a_3^*D+a_2a_0^*C+ \\ a_2a_1^*D+a_2a_2^*A+a_2a_3^*B+a_3a_0^*D+a_3a_1^*B+a_3a_2^*E+a_3a_3^*E+a_4a_0^*+a_2a_4^*=0 \\ a_0a_0^*E+a_0a_1^*D+a_0a_2^*B+a_0a_3^*E+a_1a_0^*E+a_1a_1^*A+a_1a_2^*E+a_1a_3^*A+a_2a_0^*D+ \\ a_2a_1^*B+a_2a_2^*E+a_2a_3^*E+a_3a_0^*B+a_3a_1^*C+a_3a_2^*D+a_3a_3^*A+a_4a_1^*+a_3a_4^*=0 \\ a_0a_0^*A+a_0a_1^*B+a_0a_2^*C+a_0a_3^*D+a_1a_0^*E+a_1a_1^*E+a_1a_2^*D+a_1a_3^*B+a_2a_0^*A+ \\ a_2a_1^*E+a_2a_2^*A+a_2a_3^*E+a_3a_0^*E+a_3a_1^*D+a_3a_2^*B+a_3a_3^*E+a_4a_2^*+a_0a_4^*=0 \\ a_0a_0^*E+a_0a_1^*E+a_0a_2^*D+a_0a_3^*B+a_1a_0^*D+a_1a_1^*A+a_1a_2^*B+a_1a_3^*C+a_2a_0^*B+ \\ a_2a_1^*E+a_2a_2^*E+a_2a_3^*D+a_3a_0^*E+a_3a_1^*A+a_3a_2^*E+a_3a_3^*A+a_4a_3^*+a_1a_4^*=0 \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} a_0a_0^*A+a_0a_1^*B+a_0a_2^*C+a_0a_3^*D+a_1a_0^*B+a_1a_1^*D+a_1a_2^*E+a_1a_3^*E+a_2a_0^*C+ \\ a_2a_1^*E+a_2a_2^*C+a_2a_3^*E+a_3a_0^*D+a_3a_1^*E+a_3a_2^*E+a_3a_3^*B+a_4a_0^*+a_0a_4^*=0 \\ a_0a_0^*B+a_0a_1^*D+a_0a_2^*E+a_0a_3^*E+a_1a_0^*D+a_1a_1^*A+a_1a_2^*B+a_1a_3^*C+a_2a_0^*E+ \\ a_2a_1^*B+a_2a_2^*D+a_2a_3^*E+a_3a_0^*E+a_3a_1^*C+a_3a_2^*E+a_3a_3^*C+a_4a_1^*+a_1a_4^*=0 \\ a_0a_0^*C+a_0a_1^*E+a_0a_2^*C+a_0a_3^*E+a_1a_0^*E+a_1a_1^*B+a_1a_2^*D+a_1a_3^*E+a_2a_0^*C+ \\ a_2a_1^*D+a_2a_2^*A+a_2a_3^*B+a_3a_0^*E+a_3a_1^*E+a_3a_2^*B+a_3a_3^*D+a_4a_2^*+a_2a_4^*=0 \\ a_0a_0^*D+a_0a_1^*E+a_0a_2^*E+a_0a_3^*B+a_1a_0^*E+a_1a_1^*C+a_1a_2^*E+a_1a_3^*C+a_2a_0^*E+ \\ a_2a_1^*E+a_2a_2^*B+a_2a_3^*D+a_3a_0^*B+a_3a_1^*C+a_3a_2^*D+a_3a_3^*A+a_4a_3^*+a_3a_4^*=0 \end{cases} \tag{25}$$

显然，上述所需满足条件的方程组比较复杂，其未知量较多，不易求解。而利用本文所提出的构造方法则能够避免上述方程组过于复杂，求解困难的问题。本文所述构造方法只需满足条件 $N=a^2+b^2$（N 为素数即可），与文献[16]方法相比，显著地降低了利用分圆类构造完备高斯整数序列的复杂程度。

5　结束语

本文提出了一类完备高斯整数序列的构造方法。

该方法通过 2 阶和 4 阶分圆类能够构造出自由度为 3 和 5、序列长度为奇素数的完备高斯整数序列。根据完备序列经 DFT 得到的谱序列为恒模序列的性质，首先采用分圆类构造序列 $s(t)$，通过对其谱序列在零时刻进行补值，使其成为恒模序列。再将该谱序列进行 IDFT 得到时域序列，则该序列即为完备高斯整数序列。该方法与同类方法相比具有构造方法简单的优点，通过对序列在频域进行操作，解决了利用分圆类构造高斯整数序列时计算量大、非线性方程组不易求解的问题。从目前情况来看，具有高自由度的完备高斯整数序列构造方法并不多，本文方法仅得到了自由度为 3 和 5 的完备高斯整数序列。因此研究具有更大自由度的完备高斯整数序列是一个有意义的方向。

参考文献：

[1] CHU D. Polyphase codes with good periodic correlation properties[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2003, 18(4):531-532.

[2] YU N Y, GONG G. New binary sequences with optimal autocorrelation magnitude[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2008, 54(10): 4771-4779.

[3] WANG S H, LI C P, LEE K C, et al. A novel low-complexity precoded OFDM system with reduced PAPR[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(6):1366-1376.

[4] MILEWSKI A. Periodic sequences with optimal properties for channel estimation and fast start-up equalization[J]. Journal of Research & Development, 1983, 27(5):426-431.

[5] LUKE H D, SCHOTTEN H D, HADINEJAD M H. Binary and quadriphase sequences with optimal autocorrelation properties: a survey[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2003, 49(12): 3271-3282.

[6] FAN P Z, DARNELL M. Maximal length sequences over Gaussian integers[J]. Electronics Letters, 1994, 30(16): 1286-1287.

[7] PEI S C, CHANG K W. Perfect Gaussian integer sequences of arbitrary length[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2014, 22(8): 1040-1044.

[8] CHANG H H, LI C P, LEE C D, et al. Perfect Gaussian integer sequences of arbitrary composite length[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2015, 61(7):4107-4115.

[9] PENG X P, XU C Q. New constructions of perfect Gaussian integer sequences of even length[J]. IEEE Communications Letters, 2014, 18(9):1547-1550.

[10] WANG S H, LI C P, CHANG H H, et al. A systematic method for constructing sparse Gaussian integer sequences with ideal periodic autocorrelation functions[J]. IEEE Transactions on Communications, 2016, 64(1):365-376.

[11] LEE C D, HUANG Y P, CHANG Y, et al. Perfect Gaussian integer sequences of odd period 2^m-1[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2015, 22(7): 881-885.

[12] LEE C D, LI C P, CHANG H H, et al. Further results on degree-2 perfect Gaussian integer sequences[J]. IET Communications, 2016, 10(12):1542-1552.

[13] LEE C D, HONG S H. Generation of long perfect Gaussian integer sequences[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2017, 24(4):515-519.

[14] LEE C D, CHEN Y H. Families of Gaussian integer sequences with high energy efficiency[J]. IET Communications, 2016, 10(17): 2416-2421.

[15] CHANG K J, CHANG H H. Perfect Gaussian integer sequences of period p^k with degrees equal to or less than k+1[J]. IEEE Transactions on Communications, 2017, 65(9): 3723-3733.

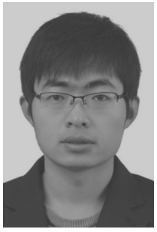
[16] YANG Y, TANG X H, ZHOU Z C. Perfect Gaussian integer sequences of odd prime length[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2012, 19(10):615-618.

[17] STORER T. Cyclotomy and difference sets[M]. Chicago: Markham Publishing Company. 1967.

[18] DING C, YIN J. Sets of optimal frequency hopping sequences[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2008, 54(8):3741-3745.

[19] BENEDETTO J J, KONSTANTINIDIS I, RANGASWAMY M. Phase-coded waveforms and their design[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2009, 26(1):22-31.

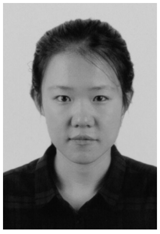
[作者简介]



李玉博（1985−），男，河北衡水人，博士，燕山大学讲师，主要研究方向为编码理论、序列设计、信息处理。

陈邈（1993−），男，河北唐山人，燕山大学硕士生，主要研究方向为无线通信、序列设计。

刘涛（1987−），女，河北秦皇岛人，燕山大学博士生，主要研究方向为组合编码、信息安全、序列设计。



张颖（1997−），女，山西平定县人，本科生，主要研究方向为无线通信、编码理论。